2 APIC • Semestre 1 • Mathématiques

01

Devoir à domicile — Correction

Corrections détaillées et justifiées

Correction détaillée Devoir à domicile de mathématiques, 2e année du collège (2 APIC) — Groupe Scolaire Wislane. Barème : 20 points

01 Exercice 1 — Opérations sur les nombres décimaux relatifs · 4 points

Exercice 1

Effectuer les calculs en détaillant les étapes et en respectant les priorités opératoires :

$$A = (-2{,}75 \times 1{,}8) + (-3{,}5 \times (-2{,}4)) + (4{,}2 \times (-1{,}5)),$$
$$B = ((-4{,}25 + 3{,}8) \times (-2{,}5)) - ((-1{,}75) \times (2{,}4) \times (-3)),$$
$$C = ((-0{,}75) \times (1{,}2) - (-2{,}5)) \times ((-1{,}8) + (2{,}4)),$$
$$D = \frac{(-3{,}6) \times (2{,}5) + (-4{,}8)}{-1{,}2} + ((-2{,}5) \times (1{,}8)),$$
$$E = ((-1{,}25) \times (2{,}4) + (-3{,}6)) \times ((-0{,}8) \times (1{,}5) - (-2{,}4)),$$
$$F = (-2{,}5) \times ((-1{,}8) + (3{,}4)) - ((2{,}6) \times (-1{,}5)),$$
$$G = ((-3{,}2) \times (1{,}5) + (-4{,}8)) \times ((-2{,}4) + (1{,}8)),$$
$$H = ((-1{,}6) \times (2{,}5) - (-3{,}2)) \times ((-0{,}9) \times (1{,}4)).$$

Correction

On calcule d'abord le contenu des parenthèses, en commençant par les multiplications, puis on termine par les additions et les soustractions. On rappelle que le produit de deux nombres de même signe est positif, et que le produit de deux nombres de signes contraires est négatif.

1. $(-2{,}75 \times 1{,}8) = -4{,}95$, $(-3{,}5 \times (-2{,}4)) = 8{,}4$ et $(4{,}2 \times (-1{,}5)) = -6{,}3$. Donc $A = -4{,}95 + 8{,}4 - 6{,}3 = 3{,}45 - 6{,}3$, d'où $\boxed{A = -2{,}85}$.
2. $-4{,}25 + 3{,}8 = -0{,}45$, donc le premier facteur vaut $(-0{,}45) \times (-2{,}5) = 1{,}125$. Ensuite, $(-1{,}75) \times (2{,}4) = -4{,}2$, puis $(-4{,}2) \times (-3) = 12{,}6$. Donc $B = 1{,}125 - 12{,}6$, d'où $\boxed{B = -11{,}475}$.
3. $(-0{,}75) \times (1{,}2) = -0{,}9$ et $-0{,}9 - (-2{,}5) = -0{,}9 + 2{,}5 = 1{,}6$. De plus, $(-1{,}8) + (2{,}4) = 0{,}6$. Donc $C = 1{,}6 \times 0{,}6$, d'où $\boxed{C = 0{,}96}$.
4. Au numérateur : $(-3{,}6) \times (2{,}5) = -9$, puis $-9 + (-4{,}8) = -13{,}8$. La fraction vaut donc $\dfrac{-13{,}8}{-1{,}2} = 11{,}5$. Et $(-2{,}5) \times (1{,}8) = -4{,}5$. Donc $D = 11{,}5 + (-4{,}5)$, d'où $\boxed{D = 7}$.
5. $(-1{,}25) \times (2{,}4) = -3$, donc le premier facteur vaut $-3 + (-3{,}6) = -6{,}6$. Ensuite, $(-0{,}8) \times (1{,}5) = -1{,}2$ et $-1{,}2 - (-2{,}4) = -1{,}2 + 2{,}4 = 1{,}2$. Donc $E = (-6{,}6) \times 1{,}2$, d'où $\boxed{E = -7{,}92}$.
6. $(-1{,}8) + (3{,}4) = 1{,}6$, donc $(-2{,}5) \times 1{,}6 = -4$. Et $(2{,}6) \times (-1{,}5) = -3{,}9$. Donc $F = -4 - (-3{,}9) = -4 + 3{,}9$, d'où $\boxed{F = -0{,}1}$.
7. $(-3{,}2) \times (1{,}5) = -4{,}8$, donc le premier facteur vaut $-4{,}8 + (-4{,}8) = -9{,}6$. Et $(-2{,}4) + (1{,}8) = -0{,}6$. Donc $G = (-9{,}6) \times (-0{,}6)$, d'où $\boxed{G = 5{,}76}$.
8. $(-1{,}6) \times (2{,}5) = -4$ et $-4 - (-3{,}2) = -4 + 3{,}2 = -0{,}8$. Et $(-0{,}9) \times (1{,}4) = -1{,}26$. Donc $H =$

$(-0{,}8) \times (-1{,}26)$, d'où $\boxed{H = 1{,}008}$.

02 Exercice 2 — Signes des produits et raisonnement · 4 points

Exercice 2

1. **Sans calculer les résultats finaux**, déterminer le signe des expressions suivantes en justifiant :

$$P = (-1{,}8) \times (+2{,}5) \times (-4{,}2) \times (+1{,}5), \qquad Q = (-3{,}6) \times (-2{,}4) \times (+1{,}5) \times (-2{,}8),$$

$$R = \big((-2{,}4) \times (+3{,}5) - (-4{,}8)\big) \times (-3{,}2 + 2{,}5).$$

2. **Sans effectuer les multiplications**, comparer et justifier :
   a) $(-2{,}5) \times (+3{,}2) \quad \ldots \quad (-3{,}2) \times (+2{,}5)$.
   b) $(-2{,}8) \times (-3{,}5) \quad \ldots \quad (-2{,}8) \times (+3{,}5)$.
3. Trouver, dans chaque cas, **trois nombres décimaux relatifs distincts** tels que :
   a) leur produit est positif et leur somme est négative ;
   b) leur produit est négatif et leur somme est positive.

Correction

1. Le signe d'un produit se détermine en comptant les facteurs négatifs : si leur nombre est pair, le produit est positif ; s'il est impair, le produit est négatif.
   1. P comporte **deux** facteurs négatifs, $(-1{,}8)$ et $(-4{,}2)$: leur nombre est pair, donc $\boxed{P \text{ est positif}}$.
   2. Q comporte **trois** facteurs négatifs, $(-3{,}6)$, $(-2{,}4)$ et $(-2{,}8)$: leur nombre est impair, donc $\boxed{Q \text{ est négatif}}$.
   3. Pour R, on détermine le signe de chaque facteur. Le produit $(-2{,}4) \times (+3{,}5)$ est négatif, car ses deux facteurs sont de signes contraires ; en lui soustrayant $(-4{,}8)$, c'est-à-dire en ajoutant $4{,}8$, on obtient un nombre toujours négatif (on peut vérifier : $-8{,}4 + 4{,}8 = -3{,}6$). Le second facteur $-3{,}2 + 2{,}5$ est négatif, car c'est la somme d'un nombre négatif et d'un nombre positif de plus petite distance à zéro (on peut vérifier : $-3{,}2 + 2{,}5 = -0{,}7$). R est donc le produit de deux nombres négatifs : $\boxed{R \text{ est positif}}$.
2. a) Les deux produits sont négatifs, car chaque produit a un facteur négatif et un facteur positif. Leurs distances à zéro sont $2{,}5 \times 3{,}2$ et $3{,}2 \times 2{,}5$, qui sont égales d'après la commutativité de la multiplication. Deux nombres négatifs ayant la même distance à zéro sont égaux : $\boxed{(-2{,}5) \times (+3{,}2) = (-3{,}2) \times (+2{,}5)}$.
   b) $(-2{,}8) \times (-3{,}5)$ est le produit de deux nombres négatifs : il est **positif**. $(-2{,}8) \times (+3{,}5)$ est le produit de deux nombres de signes contraires : il est **négatif**. Un nombre positif est toujours plus grand qu'un nombre négatif, donc : $\boxed{(-2{,}8) \times (-3{,}5) > (-2{,}8) \times (+3{,}5)}$.
3. a) Pour que le produit de trois nombres soit positif, il faut soit trois nombres positifs, soit un nombre positif et deux nombres négatifs. Trois nombres positifs auraient une somme positive, donc on choisit un positif et deux négatifs, avec des négatifs assez grands en distance à zéro pour que la somme soit négative. Par exemple -5, -1 et $+2$: leur produit est $(-5) \times (-1) \times (+2) = \boxed{10}$, qui est positif, et leur somme est $-5 + (-1) + 2 = \boxed{-4}$, qui est négative.
   b) Pour que le produit de trois nombres soit négatif, il faut soit trois nombres négatifs, soit un nombre négatif et deux nombres positifs. Trois nombres négatifs auraient une somme négative, donc on choisit un négatif et deux positifs, avec des positifs assez grands pour que la somme soit positive.

Par exemple -1, $+2$ et $+3$: leur produit est $(-1)\times(+2)\times(+3) = \boxed{-6}$, qui est négatif, et leur somme est $-1+2+3 = \boxed{4}$, qui est positive.

03 Exercice 3 — Nombres rationnels : comparaison et rangement · 5 points

Exercice 3

1. Mettre au même dénominateur, puis ranger dans l'**ordre croissant** :

$$\frac{23}{15}\ ;\qquad \frac{17}{30}\ ;\qquad \frac{13}{5}\ ;\qquad \frac{7}{6}.$$

Expliquer le choix du dénominateur commun et justifier le classement.

2. Mettre au même dénominateur, puis ranger dans l'**ordre décroissant** :

$$\frac{7}{9}\ ;\qquad \frac{47}{4}\ ;\qquad \frac{29}{8}\ ;\qquad \frac{5}{27}\ ;\qquad \frac{11}{16}\ ;\qquad \frac{2}{3}.$$

a) Déterminer un dénominateur commun aux six fractions.

b) Écrire les fractions avec ce dénominateur, puis justifier le classement.

Correction

1. Les dénominateurs sont 15, 30, 5 et 6. Le nombre 30 est un multiple de chacun d'eux ($30 = 2\times 15 = 6\times 5 = 5\times 6$) : c'est le plus petit dénominateur commun possible. On écrit chaque fraction avec le dénominateur 30 :

$$\frac{23}{15} = \frac{23\times 2}{15\times 2} = \frac{46}{30},\qquad \frac{17}{30} = \frac{17}{30},\qquad \frac{13}{5} = \frac{13\times 6}{5\times 6} = \frac{78}{30},\qquad \frac{7}{6} = \frac{7\times 5}{6\times 5} = \frac{35}{30}.$$

À dénominateur égal, les fractions se rangent comme leurs numérateurs. Or $17 < 35 < 46 < 78$, donc :

$$\boxed{\frac{17}{30} < \frac{7}{6} < \frac{23}{15} < \frac{13}{5}}.$$

2. a) Les dénominateurs sont 9, 4, 8, 27, 16 et 3. On cherche le plus petit multiple commun : $9 = 3^2$, $4 = 2^2$, $8 = 2^3$, $27 = 3^3$, $16 = 2^4$ et $3 = 3$, donc le plus petit dénominateur commun est $2^4\times 3^3 = 16\times 27 = \boxed{432}$.

b) On convertit chaque fraction (le facteur multiplicatif est 432 divisé par le dénominateur) :

$$\frac{7}{9} = \frac{7\times 48}{432} = \frac{336}{432},\qquad \frac{47}{4} = \frac{47\times 108}{432} = \frac{5076}{432},\qquad \frac{29}{8} = \frac{29\times 54}{432} = \frac{1566}{432},$$

$$\frac{5}{27} = \frac{5\times 16}{432} = \frac{80}{432},\qquad \frac{11}{16} = \frac{11\times 27}{432} = \frac{297}{432},\qquad \frac{2}{3} = \frac{2\times 144}{432} = \frac{288}{432}.$$

À dénominateur égal, on range les fractions comme leurs numérateurs. Or $5076 > 1566 > 336 > 297 > 288 > 80$, donc, dans l'ordre décroissant :

$$\boxed{\frac{47}{4} > \frac{29}{8} > \frac{7}{9} > \frac{11}{16} > \frac{2}{3} > \frac{5}{27}}.$$

04 Exercice 4 — Symétries et démonstration géométrique · 7 points

Exercice 4

ABC est un triangle rectangle en A. Soit H le pied de la hauteur issue de A relative au côté $[BC]$.

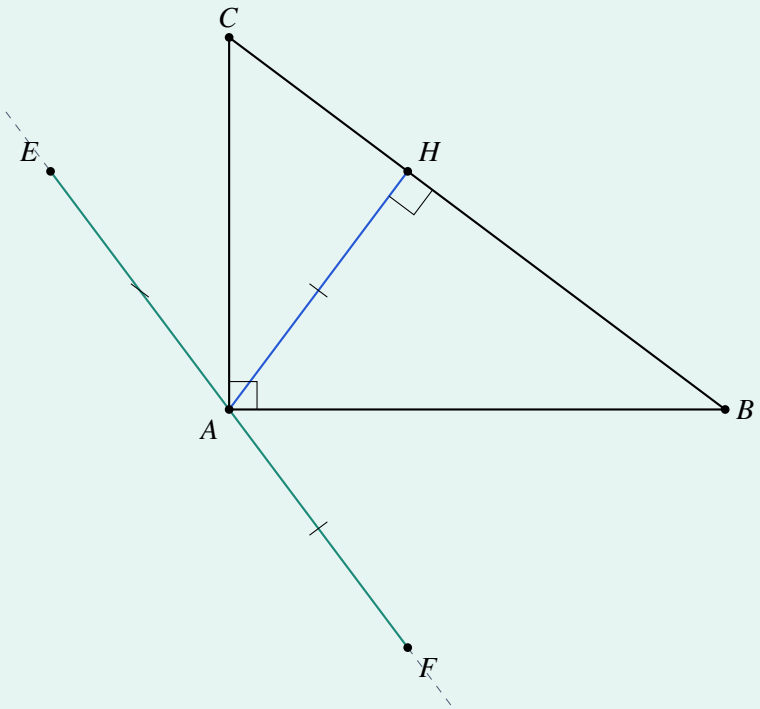
1. Construire le triangle ABC et tracer sa hauteur $[AH]$.
2. Construire E, symétrique de H par rapport à la droite (AC), puis F, symétrique de H par rapport à la droite (AB).
3. En utilisant les propriétés de la symétrie axiale, montrer que :

$$\widehat{BAF} = \widehat{HAB} \qquad \text{et} \qquad \widehat{EAC} = \widehat{CAH}.$$

4. a) Montrer que les points E, A et F sont alignés.
   b) Démontrer que $AE = AF$.
   c) En déduire que A est le milieu du segment $[EF]$.

Correction

1) et 2) On trace un angle droit en A (à l'équerre), on place B sur un côté et C sur l'autre, puis on trace $[BC]$. À l'équerre, on abaisse de A la perpendiculaire à (BC) : son pied est H. On construit ensuite E et F au compas : E est le point tel que (AC) soit la médiatrice de $[HE]$, et F est le point tel que (AB) soit la médiatrice de $[HF]$. La figure ci-dessous correspond à $AB = 8$ cm et $AC = 6$ cm ; le raisonnement est le même pour tout triangle rectangle en A.



3) La symétrie axiale conserve les mesures des angles.

1. Par la symétrie d'axe (AB), le point H a pour image F, et les points A et B, qui sont sur l'axe, ont pour images eux-mêmes. L'angle $\widehat{HAB}$ a donc pour image l'angle $\widehat{FAB}$, et ils ont la même mesure : $\boxed{\widehat{BAF} = \widehat{HAB}}$.
2. Par la symétrie d'axe (AC), le point H a pour image E, et les points A et C ont pour images eux-mêmes. L'angle $\widehat{CAH}$ a donc pour image l'angle $\widehat{CAE}$, et ils ont la même mesure : $\boxed{\widehat{EAC} = \widehat{CAH}}$.

4)

a) Autour du point A, les angles $\widehat{EAC}$, $\widehat{CAB}$ et $\widehat{BAF}$ sont adjacents et leur somme est la mesure de l'angle $\widehat{EAF}$:

$$\widehat{EAF} = \widehat{EAC} + \widehat{CAB} + \widehat{BAF}.$$

D'après la question 3, $\widehat{EAC} = \widehat{CAH}$ et $\widehat{BAF} = \widehat{HAB}$, donc :

$$\widehat{EAF} = \widehat{CAH} + \widehat{CAB} + \widehat{HAB}.$$

Or le point H est à l'intérieur de l'angle $\widehat{BAC}$, donc $\widehat{CAH} + \widehat{HAB} = \widehat{CAB} = 90°$ (le triangle est rectangle en A). Il vient :

$$\widehat{EAF} = 90° + 90° = 180°.$$

L'angle $\widehat{EAF}$ est un angle plat, donc $\boxed{\text{les points } E, A \text{ et } F \text{ sont alignés}}$.

b) La symétrie axiale conserve aussi les distances. Par la symétrie d'axe (AC), A est sur l'axe et H a pour image E, donc $AE = AH$. Par la symétrie d'axe (AB), A est sur l'axe et H a pour image F, donc $AF = AH$. On en déduit : $\boxed{AE = AF}$.

c) Les points E, A et F sont alignés (question 4a) et $AE = AF$ (question 4b) : le point A est donc situé sur le segment $[EF]$, à égale distance de ses extrémités. Donc $\boxed{A \text{ est le milieu du segment } [EF]}$.